Обучението по математика и информатика, брой 3, 1993 г.

РЕШАВАНЕ НА УРАВНЕНИЯ ЧРЕЗ СВЕЖДАНЕ ДО СИСТЕМИ УРАВНЕНИЯ

Митко Кунчев, МГ „Баба Тонка” - Русе

Благодаря на Любомир Давидов за помощта, която ми оказа при написването на тази статия.

Един от често срещаните методи за решаване на уравнения е „решаване чрез полагане”. Кратка теоретична обосновка на този метод може да се намери в [3, с. 7]. Там теорема 3 и теорема 4 показват възможността множеството от решения на едно уравнение да се намери като обединение на множествата от решения на други уравнения. Значително по-рядко се среща решаване на уравнение чрез свеждане до решаване на система уравнения (по-нататък за по-кратко ще казваме “решаване чрез система”), като в учебната литература липсва теоретично изясняване на метода. Да разгледаме един пример:

Задача 1. Да се реши уравнението $\sqrt{15x^2+6x+4}-\sqrt{10x^2+4x+2}=1$.

Решение. Полагаме

$$\sqrt{15x^2+6x+4}=u,\ u\geq 0;\qquad \sqrt{10x^2+4x+2}=v,\ v\geq 0$$

и получаваме системата

$$\begin{vmatrix} u-v=1 \\ 2u^2-3v^2=2,\quad u\geq 0,\quad v\geq 0. \end{vmatrix}$$

Решенията на тази система са наредените двойки (1, 0) и (5, 4). Търсените корени намираме от $v=\sqrt{10x^2+4x+2}=0$ и $v=\sqrt{10x^2+4x+2}=4$. Решения има само второто и те са $x_1=-1{,}4$ и $x_2=1$. Теоретичен анализ на разглеждания проблем в [2] липсва. Доказателство, макар и в по-частен случай, намираме в [1, с. 49]. Там се разглежда уравнение от вида:

(1) $$\sqrt[n]{a-f(x)}+\sqrt[n]{b-f(x)}=c.$$

То се решава, като се положи $\sqrt[n]{a-f(x)}=u$ и $\sqrt[n]{b-f(x)}=v$ и се реши системата

$$\begin{vmatrix} u+v=c \\ u^n+v^n=a+b. \end{vmatrix}$$

В случай, че n е четно число се допълват условията $u\geq 0$ и $v\geq 0$. Да разгледаме още една задача.

Задача 2. Да се реши уравнението $\sqrt[4]{629-x}+\sqrt[4]{77+x}=8$, [1, с. 50].

Решение. Полагаме

$$\sqrt[4]{629-x}=u,\quad u\geq 0;\qquad \sqrt[4]{77+x}=v,\quad v\geq 0.$$

Тогава u и v ще удовлетворяват системата

$$\begin{vmatrix} u+v=8 \\ u^4+v^4=706,\quad u\geq 0,\quad v\geq 0. \end{vmatrix}$$

След преобразуване на второто уравнение получаваме

$$\begin{vmatrix} u+v=8,\quad u\geq 0,\quad v\geq 0; \\ \left[(u+v)^2-2uv\right]^2-2u^2v^2=706. \end{vmatrix}$$

Лесно намираме $uv=15$ или $uv=113$ и получаваме две системи

$$\begin{vmatrix} u+v=8 \\ uv=15 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} u+v=8 \\ uv=113. \end{vmatrix}$$

Решения има само първата и те са (3, 5) и (5, 3). За да намерим *x*, остава да решим уравненията $\sqrt[4]{77+x}=3$ и $\sqrt[4]{77+x}=5$, откъдето намираме съответно $x_1=4$ и $x_2=548$.

Ще разгледаме едно обобщение на (1).

Предложение 1. Нека е дадено уравнението

(2) $$\sqrt[n]{f(x)}+\sqrt[m]{g(x)}=c\ ,$$

като съществуват реални числа α, β и γ такива, че $\alpha.f(x)+\beta.g(x)=\gamma$. Ако положим $\sqrt[n]{f(x)}=u$ и $\sqrt[m]{g(x)}=v$, то решаването на уравнение (2) може да се сведе до решаване на системата

(3) $$\begin{vmatrix} u+v=c \\ \alpha.u^n+\beta.v^m=\gamma. \end{vmatrix}$$

В случай, че *n* или *m* са четни, се налага условието $u\ge 0$ или $v\ge 0$.

Доказателство.

I. Нека x_0 е едно решение на (2). Тогава означаваме $\sqrt[n]{f(x_0)}=u_0$ и $\sqrt[m]{g(x_0)}=v_0$ и очевидно (u_0, v_0) е решение на (3).

II. Нека сега (u_0, v_0) е едно решение на (3), а x_0 е решение на $\sqrt[n]{f(x)}=u_0$ (ако *n* или *m* е четно, трябва $u_0\ge 0$ или $v_0\ge 0$). От второто уравнение на (3) намираме

$$v_0^m=\frac{\gamma-\alpha.u_0^n}{\beta}=\frac{\gamma-\alpha.f(x_0)}{\beta} \text{ и } v_0=\sqrt[m]{\frac{\gamma-\alpha.f(x_0)}{\beta}}=\sqrt[m]{g(x_0)}\ .$$

Първото уравнение на (3) дава $u_0+v_0=c=\sqrt[n]{f(x_0)}+\sqrt[m]{g(x_0)}$, т. е. x_0 е решение на (2).

Ако (u_0, v_0) е произволно решение на (3), и никое уравнение $\sqrt[n]{f(x)}=u_0$ няма решение, то от **I.** следва, че и даденото уравнение няма решение.

Ако системата (3) няма решение, то от **I.** следва, че и даденото уравнение няма решение.

Извод: Можем да смятаме, че множеството от решения на уравнението (2) ”поражда” множеството от решения на (3) и обратно.

Ще илюстрираме последните разсъждения като решим уравнението:

Задача 3. $\sqrt[5]{\frac{1}{2}+x}+\sqrt{\frac{1}{2}-x}=1$ **,** [1, с. 53].

Решение. Полагаме $\sqrt[5]{\frac{1}{2}+x}=u$ и $\sqrt{\frac{1}{2}-x}=v,\ v\ge 0$. Тогава *u* и *v* ще удовлетворяват системата

$$\begin{vmatrix} u+v=1 \\ u^5+v^2=1,\ v\ge 0. \end{vmatrix}$$

Преобразуваме второто уравнение като вземем пред вид, че $v=1-u$

$$u^5+v^2=u^5+(1-u)^2=u^5+u^2-2u+1=1$$

или $u^5+u^2-2u=0$. Полученото уравнение има реални решения $u_1=0$, $u_2=1$ и $u_3\approx -1{,}353209964$. Вместо получената система трябва да решим трите системи

$$\begin{vmatrix} u=0 \\ u+v=1, \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} u=1 \\ u+v=1, \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} u\approx -1{,}35 \\ u+v=1, \end{vmatrix}$$

от които намираме съответно $v_1=1,\ v_2=0,\ v_3\approx 2{,}35$.

За да намерим *x*, трябва да решим уравненията

$$\sqrt{\frac{1}{2}-x}=1,\quad \sqrt{\frac{1}{2}-x}=0,\quad \sqrt{\frac{1}{2}-x}\approx 2{,}35.$$

Окончателно намираме $x_1=-0{,}5,\quad x_2=0{,}5,\quad x_3\approx -5{,}0225$.

Идеята за решаване чрез система може да бъде разширена и да обхване и други видове уравнения.

Предложение 2. Нека е дадено уравнението

(4) $$f\left(x,\varphi(x)\right)=0.$$

Ако положим $\varphi(x)=y$, то (4) е еквивалентно на системата

(5) $$\left|\begin{array}{l} f(x,y)=0 \\ \varphi(x)=y. \end{array}\right.$$

Доказателство. Нека x_0 е едно решение на (4). Тогава означаваме $y_0=\varphi(x_0)$ и следователно (x_0,y_0) е решение на (5).

Нека (x_0,y_0) е решение на (5), т. е. $f(x_0,y_0)=0$ и $\varphi(x_0)=y_0$. Тогава $f\left(x_0,\varphi(x_0)\right)=0$ и следователно x_0 е решение на (4). Очевидно ако уравнението (4) няма решение, то и системата (5) няма решение и обратно.

Забележка. Понятието еквивалентност употребяваме в смисъл, че всяко решение на (4) поражда решение на (5) и обратно.

Задача 4. Да се реши уравнението $x^2+\sqrt{x+5}=5$ [4, с. 135].

Решение. Полагаме $\sqrt{x+5}=y,\ y\ge 0$ и получаваме еквивалентната система

$$\left|\begin{array}{l} x^2+y=5 \\ \sqrt{x+5}=y,\quad y\ge 0,\quad x\in\left[-\sqrt{5},\sqrt{5}\right], \end{array}\right.$$

от която след преобразуване получаваме

$$\left|\begin{array}{l} x^2+y=5,\quad x\in\left[-\sqrt{5},\sqrt{5}\right] \\ (x+y)(x-y+1)=0,\quad y\ge 0. \end{array}\right.$$

Последната се разпада на две системи, след решаване на които намираме $x_1=\frac{1-\sqrt{21}}{2}$ и $x_2=\frac{\sqrt{17}-1}{2}$. По подобен начин може да се решат и уравненията $x^2+\sqrt{x+a}=a$ и $a+\sqrt{a+x}=x^2$.

Задача 5. (II кръг на ОМ, 11. клас, 1987 г.) Да се реши уравнението $2\log_3 \cot g\, x=\log_2 \cos x$.

Решение. Дефиниционното множество на уравнението е $\left(2k\pi,\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right),\ k\in Z$. Полагаме $\log_2 \cos x=y$ и получаваме системата

$$\left|\begin{array}{l} \log_2 \cos x=y \\ \log_3 \dfrac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}=y, \end{array}\right.$$

която е равносилна с

$$\begin{vmatrix} \cos x = 2^y \\ \dfrac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x} = 3^y. \end{vmatrix}$$

След заместване на $\cos x$ от първото във второто, получаваме уравнението $\dfrac{4^y}{1-4^y} = 3^y$,

откъдето намираме $y = -1$ и следователно $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in Z$.

Предложение 3. Нека е дадено уравнението

(6) $$f\left(f(x)\right) = x.$$

Ако положим $f(x) = y$, то (6) е еквивалентно на системата

(7) $$\begin{vmatrix} f(y) = x \\ f(x) = y. \end{vmatrix}$$

Доказателство. Нека x_0 е решение на (6), т. е. $f\left(f(x_0)\right) = x_0$. Означаваме $f(x_0) = y_0$ и следователно (x_0, y_0) е решение на (7).

Нека (x_0, y_0) е решение на (7), т. е. $f(x_0) = y_0$ и $f(y_0) = x_0$. Тогава е очевидно $f\left(f(x_0)\right) = x_0$ и x_0 е решение на (6).

Ако (6) няма решение, то и (7) няма решение и обратно.

В тази връзка да разгледаме следния пример.

Задача 6. Да се реши уравнението $(x^2 + 2x - 5)^2 + 2(x^2 + 2x - 5) - 5 = x$.

Решение. Полагаме $x^2 + 2x - 5 = y$. Тогава уравнението е еквивалентно на системата

$$\begin{vmatrix} x^2 + 2x - 5 = y \\ y^2 + 2y - 5 = x, \end{vmatrix}$$

която решаваме като вадим почленно двете уравнения и получаваме две системи

$$\begin{vmatrix} x^2 + 2x - 5 = y \\ x - y = 0, \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} x^2 + 2x - 5 = y \\ x + y + 3 = 0. \end{vmatrix}$$

След като изразим *y* от второто уравнение и заместим в първото, получаваме две квадратни уравнения относно *x*.

Окончателно намираме $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$ и $x_{3,4} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Разглежданите тук три предложения не изчерпват всички случаи на приложение на метода „решаване чрез система”. Ето още два примера:

Задача 7. Да се реши уравнението $\sqrt{20-x} + \sqrt{x-3} + \sqrt[4]{(20-x)(x-3)} = 7$.

Решение. Дефиниционното множество е интервала $[3, 20]$. Полагаме

$$\sqrt{20-x} + \sqrt{x-3} = u,\ u \geq 0; \qquad \sqrt[4]{(20-x)(x-3)} = v,\ v \geq 0.$$

Тогава $u + v = 7$ и $u^2 = (20-x) + (x-3) + 2\sqrt{(20-x)(x-3)} = 17 + 2v^2$. Получаваме системата

$$\begin{vmatrix} u + v = 7 \\ u^2 = 17 + 2v^2, \quad u \geq 0, v \geq 0, \end{vmatrix}$$

решенията на която са $(23, -16)$ и $(5, 2)$. Тъй като $u \geq 0$ и $v \geq 0$, решенията на уравнението ще търсим само от

$$\begin{cases} \sqrt{20-x}+\sqrt{x-3}=5 \\ \sqrt[4]{(20-x)(x-3)}=2. \end{cases}$$

Окончателно намираме $x_1 = 4$ и $x_2 = 19$.

Задача 8. Да се реши уравнението $\sqrt{1-x^2} = \left(\frac{2}{3}-\sqrt{x}\right)^2$, [6, с. 4].

Решение. Полагаме $\sqrt{x}=u$ и $\frac{2}{3}-\sqrt{x}=v$, $x\in[0,1]$, $u\ge 0$, $v\le\frac{2}{3}$ и получаваме системата

$$\begin{cases} u+v=\frac{2}{3} \\ u^4+v^4=1. \end{cases}$$

Преобразуваме второто уравнение:

$$u^4+v^4=\left[(u+v)^2-2uv\right]^2-2u^2v^2=1,\quad 2(uv)^2-\frac{16}{9}(uv)-\frac{65}{81}=0$$

и намираме $uv=\frac{1}{2}\left(4\pm\sqrt{\frac{97}{2}}\right)$. По-нататък решение има само системата

$$\begin{cases} u+v=\frac{2}{3} \\ u.v=\frac{1}{9}\left(4-\sqrt{\frac{97}{2}}\right). \end{cases}$$

От тук $u=\frac{1}{3}\left(1+\sqrt{\sqrt{\frac{97}{2}}-3}\right)$ и $v=\frac{1}{3}\left(1-\sqrt{\sqrt{\frac{97}{2}}-3}\right)$ или обратно. Пред вид ограниченията за *u* и *v*, решение за *x* намираме само от $u=\sqrt{x}=\frac{1}{3}\left(1+\sqrt{\sqrt{\frac{97}{2}}-3}\right)$.

Решение на уравнението е $x=\frac{1}{9}\left(1+\sqrt{\sqrt{\frac{97}{2}}-3}\right)^2$.

За самостоятелна работа предлагам още няколко примера.

Задача 9. Да се решат уравненията

а) $\sqrt[4]{x+62}+\sqrt[4]{6-x}=3\sqrt{2}$; Отг. -58; 2.

б) $\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[3]{6+x}=3$; Отг. -5; 2

в) $\sqrt{6x+2}+\sqrt[3]{21x+20}=5$; Отг. 1/3.

г) $\sqrt{4x^2+2x-3+\sqrt{2x^2+x-1}}=x$; Отг. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

д) $x.\frac{19-x}{x+1}.\left(x+\frac{19-x}{x+1}\right)=84$; Отг. 3; 4; $6\pm\sqrt{29}$.

е) $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}-2\sqrt{x^2-5x}=2x-25$; Отг. 9.

ж) $3+\sqrt{3+\sqrt{x}}=x$. Отг. $\frac{7+\sqrt{13}}{2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шарова, Л. Уравнения и неравенства. Киев, Вища школа, 1981.
2. Златанов, Г. и др. Учебно пособие за факултативна подготовка по математика в 8. клас на ЕСПУ. София, Народна просвета, 1986.
3. Запрянов, З. и др., Математика – учебно помагало за свободноизбираема подготовка в 10. клас на ЕСПУ. София, Народна просвета, 1990.
4. Коларов. К, и др., Сборник задачи по алгебра 7. – 10. клас. София, Народна просвета, 1984.
5. Коларов, К. и др., Сборник задачи по алгебра 7. – 10. клас. София, Народна просвета, 1987.
6. Давидов, Л. Стандартни задачи по алгебра, София, МНП, 1984.
7. Шарыгин, И. Факультативны курс по математике. Москва, Просвещение, 1989.